



Bedeutung von Zufall und Wahrscheinlichkeit

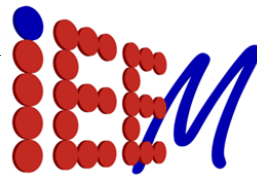
Wirtschaftliche und politische Entscheidungen basieren häufig auf Annahmen und Vorhersagen künftiger Ereignisse.

Entwicklung der Wirtschaft → Aktienverlauf

Entwicklung der Flüchtlingszahlen → Haushalt der Regierung

Voraussichtliche (erhoffte) Produktnachfrage → Investitionshöhe...

Anzahl der Naturkatastrophen → Höhe der Versicherungspolice



Quantitativer Aussagen

Ausgang eines Fußballspiels

„Schalke wird das nächste Derby zu 90% gewinnen“

Joker bei Günter Jauch

„Ich bin mir zu 75% sicher“

Klassenarbeiten & Klausuren

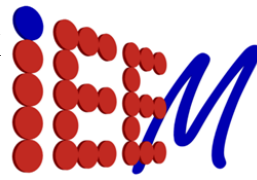
„Ich bin mir zu 80% sicher, die Arbeit zu bestehen“

Wirtschaftliche Entwicklung

„Das Wirtschaftswachstum der BRD wird im nächsten Jahr 1,5% betragen“

Wetterprognose

„Die Regenwahrscheinlichkeit beträgt Morgen 70%“



Quantitativer Aussagen

Ergebnis beim Münzwurf

„Kopf fällt in der Hälfte aller Fälle“

Ergebnisse beim Wurf einer Reißzwecke

„Die Reißzwecke fällt in 60% der Fälle auf den Kopf“

Ergebnisse beim Basketball

„Dirk Nowitzki trifft zu 75% den Korb“

Aus Aufgabenstellungen

„Aufgrund von Erfahrungen weiß man, dass 5% der Birnen defekt sind“



Herleitung quantitativer Aussagen

Wirtschaftliche Entwicklung

Das wirtschaftliche Wachstum wird im nächsten Jahr
2% betragen

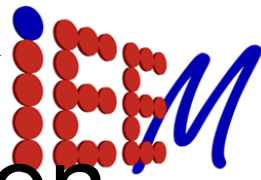
Grundlage:

Wirtschaftliche Daten aus der Gegenwart und
der Vergangenheit

Annahmen über das Zusammenwirken von
Daten

...

(Subjektives) Modell einer wirtschaftlichen
Entwicklung



Herleitung quantitativer Aussagen

Ausgang eines Fußballspiels

Schalke wird das nächste Derby zu 90% gewinnen

Grundlage:

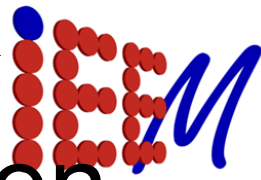
Derzeitiger Tabellenplatz

Derzeitige Stärke der Mannschaft

Emotionale Bindung an den Verein

...

Subjektives Modell: Grad des Vertrauens, der im weiteren Verlauf durch neue empirische Daten erhärtet oder revidiert wird.



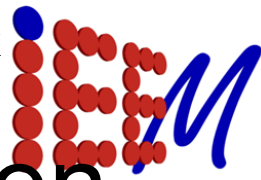
Herleitung quantitativer Aussagen

Ergebnisse beim Wurf einer Reißzwecke

Die Reißzwecke fällt in 60% auf den Kopf

60% ist das Ergebnis wiederholter
Durchführungen des Wurfes einer
Reißzwecke

Empirisches Modell: Stabilisierung der
Ergebnisse



Herleitung quantitativer Aussagen

Ergebnisse beim Wurf einer Münze

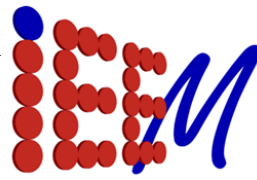
Kopf kommt in der Hälfte aller Fälle

Grundlage:

Theoretische Überlegungen

„Kopf“ und „Zahl“ sind symmetrisch zueinander
und daher gleichberechtigt

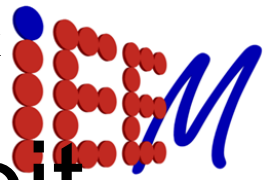
Theoretisches Modell: symmetrisches
Experiment



- 1. Subjektivistisches Modell

Basiert auf eigenen Erfahrungen

- Lernen aus Erfahrung
- Auch bei Vorgänge, die nicht wiederholbar sind
- Theoretischer Ansatz,
 - Wahrscheinlichkeiten werden **vor** Durchführung des Vorgangs aufgrund eigener Erfahrungen und/oder persönlicher (Wunsch) Vorstellungen getroffen und durch **nach**folgende Erfahrungen modifiziert
- Ziel: Aussagen zu machen über Wahrscheinlichkeiten künftiger zufälliger Ereignisse



Subjektive Wahrscheinlichkeit

Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Subjektives Maß für eine
persönliche Einschätzung

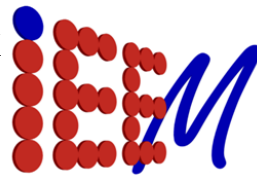
Beispiele

Ausgang eines Fußballspiel

Zuverlässigkeit einer Person

Gefahrensituationen

Maß wird aufgrund von
Erfahrungen gebildet und
verändert.



1. Subjektivistisches Modell

Probleme:

Abhängigkeit vom Individuum

Erfahrung und persönliche Einschätzung

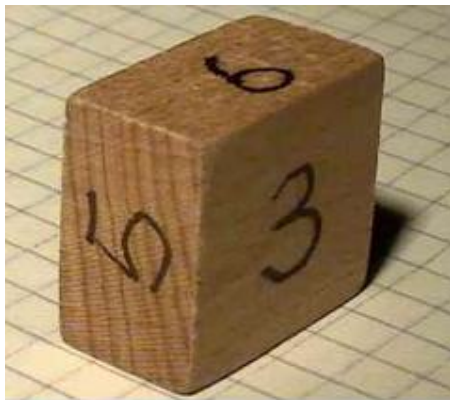
Fortlaufende Revision der Wahrscheinlichkeit

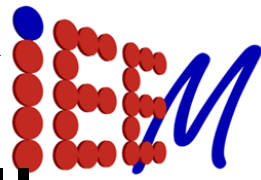
Schwer zu quantifizieren

Aber: häufig Grundlage für wirtschaftliche und persönliche Entscheidungen

Frequentistisches Modell

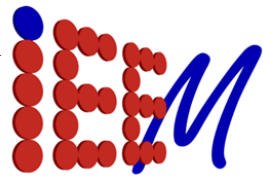
- Beispiele
 - Quaderwürfeln
 - Schweinchenwürfeln
 - Reißzweckenwürfeln
 - Wetterprognose





Frequentistisches Modell

- 2. frequentistische Wahrscheinlichkeit
 - Basiert auf Erfahrung im Umgang mit zufälligen Vorgängen
 - Schwankungen der relativen Häufigkeiten nimmt mit wachsenden Versuchswiederholungen ab
 - Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich mit wachsenden Versuchswiederholungen.
 - Empirischer Ansatz
 - Erkenntnisse werden **nach** Durchführung eines Zufallsexperiments gewonnen
 - Ziel: Aussagen zu machen, über die Wahrscheinlichkeit, die dem Versuch zugrunde liegt.



Frequentistische Wahrscheinlichkeit

Grundlage:

- Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Die relativen Häufigkeiten eines zufälligen Ereignisses stabilisieren sich mit zunehmender Wiederholung des zugrunde liegenden zufälligen Vorgangs.

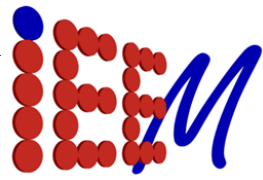
Relative Häufigkeiten sind damit ein guter Schätzer für Wahrscheinlichkeiten

Aber: Relative Häufigkeiten unterliegen in kurzen Versuchsreihen größeren Schwankungen

- Lernenden müssen dafür ein „Gefühl“ entwickeln

- Einsicht schaffen: Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Erst auf lange Sicht sind Erkenntnisse möglich.

- Auf lange Sicht werden Muster sichtbar



Frequentistische Wahrscheinlichkeit

Probleme:

Modell nur anwendbar, wenn das Zufallsexperiment beliebig häufig wiederholbar ist

Gibt es stets eine „objektive“ Wahrscheinlichkeit?

Lage der Reißzwecke

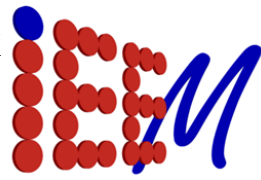
Anzahl der Mädchengeburt

Dirk Nowitzkis Trefferwahrscheinlichkeit

Was heißt relative Häufigkeit stabilisiert sich mit zunehmender Anzahl der Versuche?

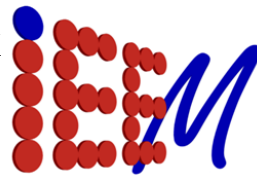
kein Grenzwert im mathematischen Sinn

Wie groß muss die Anzahl der Versuche sein?



3. Laplace Modell

- Basiert auf aus Vernunft gewonnenen Eigenschaften
 - Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse wird angenommen, wenn kein ausreichender Grund dagegen spricht
 - Symmetrieüberlegungen als Grundlage für die Gleichverteilung
- theoretischer Ansatz
 - Erkenntnisse werden **vor** Durchführung eines Zufallsexperiments durch Überlegungen gewonnen
- Ziel: Aussagen zu machen über relative/ absolute Häufigkeiten für konkrete Durchführungen eines Zufallsversuchs



3. Laplace Modell

Probleme:

Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse wird angenommen, wenn kein ausreichender Grund dagegen spricht.

Gibt es die ideale Münze?

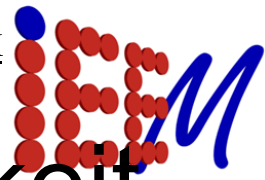
Zirkelschluss

Was Wahrscheinlichkeit ist, bleibt offen

Wir lernen „nur“ in einfachen Fällen

Wahrscheinlichkeiten zu berechnen

Die Anzahl der möglichen Fälle muss endlich groß sein



4. axiomatische Wahrscheinlichkeit

Basiert auf einem mathematischen Modell, dessen Eigenschaften axiomatisch vorgegeben werden.

Funktion P auf einer Ergebnismenge Ω mit den Eigenschaften

- Nichtnegativität $P(E) \geq 0$
- Normiertheit $P(\Omega) = 1$
- Additivität $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
- Ziel:
- Theoriegestützte Analyse aller zufälliger Ereignisse

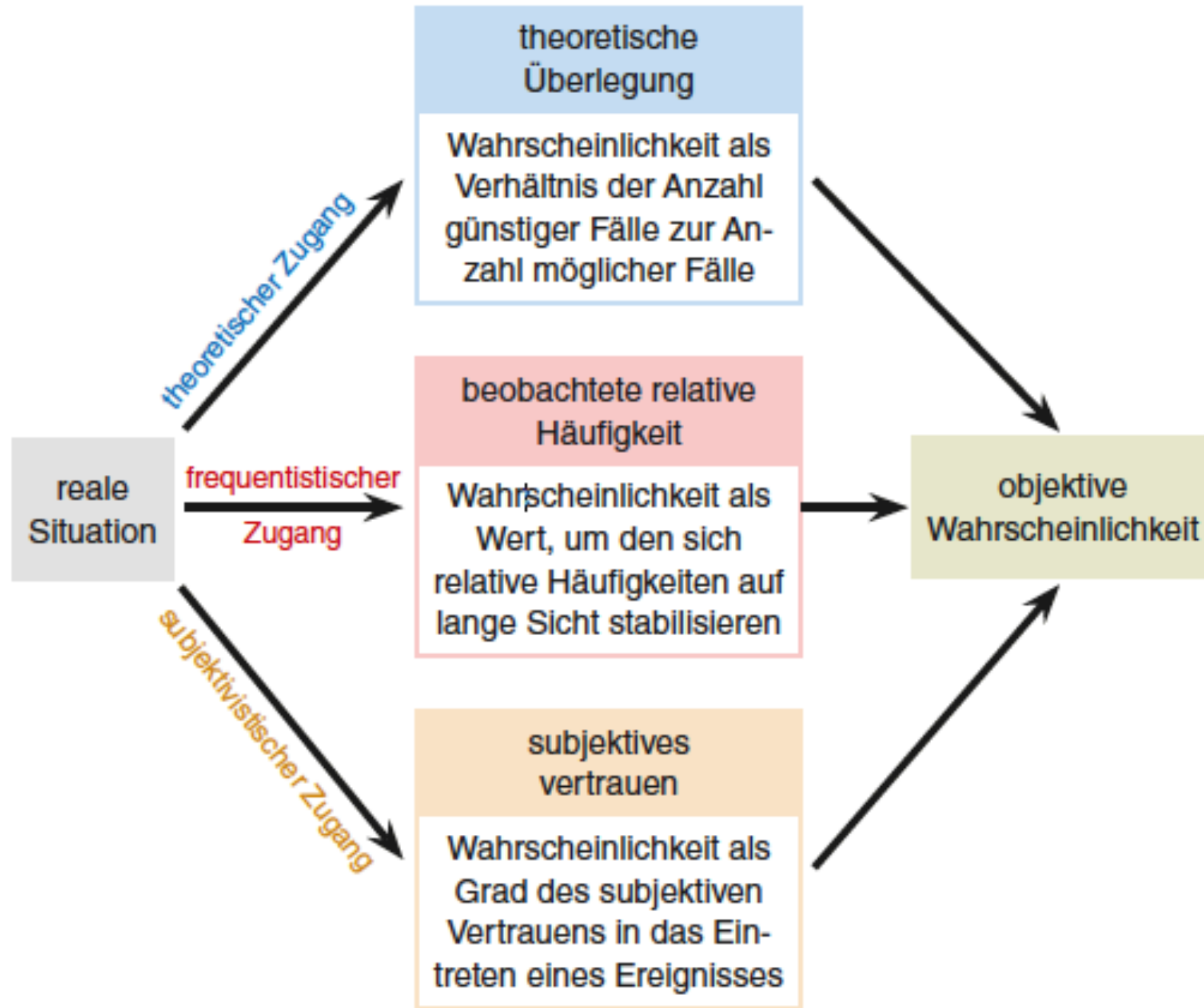
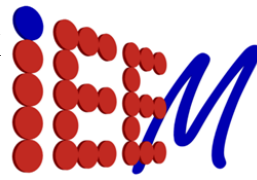


Abb. 4: Unterschiedliche Modellierungen für Wahrscheinlichkeit



Workshop

Erfahrungen mit unterschiedlichen Modellierungen sammeln.

Tetraederwürfeln (das höhere Ergebnis gewinnt):

T1: 1,1,1,4

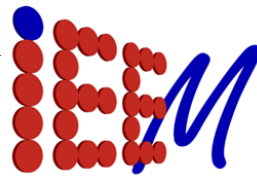
T2: 0,1,2,3

Mit welchem Tetraeder hat man die größeren Chancen zu gewinnen?

Subjektivistisch

Frequentistisch (mit und ohne Rechner)

Klassisch

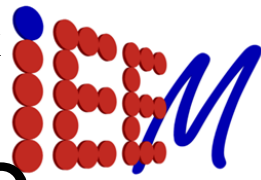


Simulation mit Rechnern

1. Simulierung eines Spieles
2. Simulierung vieler Spiele
3. Dokumentation vieler Spielergebnisse
4. Auswertung vieler Spielergebnisse
(graphisch und/oder algebraisch)

Die Punkte 1. - 3. sollten alle Lernenden mit dem Rechner durchführen können.

4. Kann als fertige Datei zur Verfügung gestellt werden



Weitere Simulationsanlässe

- Warten auf die erste 6
- Wir addieren Stammbrüche bis zur Summe 5
- Wie viele Rosinenbrötchen erhält man mit 100 Rosinen für 50 Brötchen?
- Drei Köpfe in drei Münzwürfen